VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

San Salvador, El Salvador – 2005

Problemas

1. ¿De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuál ocupa la posición 2005?

2. Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

3. En el triángulo $\triangle ABC$ sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo $\triangle PQR$ en $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$, respectivamente.

   a) Demuestre que las rectas $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ se cortan en el mismo punto.

   b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo $\triangle PQR$.

4. Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla: Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul. Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

5. En un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, sean H su ortocentro y M el punto medio de lado $\overline{AC}$. Por M se traza una recta l paralela a la bisectriz del ángulo $\angle AHC$. Demuestre que la recta l divide al triángulo $\triangle ABC$ en dos partes que tienen el mismo perímetro.

6. Se tienen n cartas numeradas de 1 a n y p cajas para guardarlas, con p primo. Determine los posibles valores de n para los que se pueden guardar todas las cartas de forma que la suma de las cartas en cada caja sea la misma.