VI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Managua, Nicaragua – 2004

Problemas

1. En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay).El jugador que borra el último número pierde. A juega primero. Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

2. Se define una sucesión $a_0, a_1, a_2, ...,$ de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$. Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente, tales que $\frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento $\overline{EF}$ y G el punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{CM}$ con el segmento $\overline{AB}$. Demostrar que el triangulo $\triangle FEG$ es semejante al triangulo $\triangle ABC$.

4. Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama lado frontera si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

5. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$ y $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$. Sea P el punto sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{AP} = \overline{AB}$ y $\overline{PD} = \overline{CD}$.

   a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90°$.

   b) Sea Q el punto medio de $\overline{BC}$ y R^o el punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.

6. Con perlas de diversos colores se forman collares. Se dice que un collar es primo si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre sí. Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.
   Nota: Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.