V Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

San José, Costa Rica – 2003

Problemas

1. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

2. Sea S una circunferencia y $\overline{AB}$ un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$; y sean G y H las intersecciones de S con $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$. Demostrar que $\overline{AH} = \overline{AG}$.

3. Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

4. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas, tales que:

   - l_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un A_2 punto distinto de P.
   - l_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un B_2 punto distinto de Q.

   Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perımetro.

5. Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

6. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

   a) Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, N, $2N$, $3N$, ..., $2003N$, son todos *ticos*.

   b) ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

Descargado de http://www.asjtnic.org