IV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Mérida, México – 2002

Problemas

1. ¿Para qué enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $1, 2, ..., n$ en forma circular de manera que cualquier número divida a la suma de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj?

2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y sean D y E los pies de las alturas desde los vértices A y B, respectivamente. Muestre que si $(BDE) \leq (DEA) \leq (EAB) \leq (ABD)$ entonces el triángulo es isósceles.

3. Para cada entero $a > 1$ se construye una lista infinita de enteros $L(a)$ como sigue:

   - a es el primer número de la lista $L(a)$
   - Dado un número b en $L(a)$, el siguiente número en la lista es $b + c$, donde c es el mayor entero que divide a b y es menor que b.

   Encuentre todos los enteros $a > 1$ tales que 2002 está en la lista $L(a)$.

4. Sean $\triangle ABC$ un triángulo, D el punto medio de $\overline{BC}$, E un punto sobre el segmento $\overline{AC}$ tal que $\overline{BE} = 2\overline{AD}$ y F el punto de intersección de $\overline{AD}$ con $\overline{BE}$. Si $\angle DAC = 60°$, encuentre la medida de los ángulos del triángulo $\triangle FEA$.

5. Encuentre un conjunto infinito de enteros positivos S tal que para cada $n \geq 1$ y cualesquiera n elementos distintos $x_1, x_2, ..., x_n$ de S, el número $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ no es un cuadrado perfecto.

6. En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con n entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos (x, y), con x y y enteros que cumplen $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a (n, n) sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama equilibrado si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.