III Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Barranquilla, Colombia – 2001

Problemas

1. Dos jugadores A y B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que unos de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

2. Sea $\overline{AB}$ un diámetro de una circunferencia S con centro O y de radio 1. Sean C y D dos puntos tales que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en un punto Q situado en el interior de S y $\angle AQD = 2\angle COD$. Sea P el punto de corte de las tangentes a S que pasan por los puntos C y D. Determinar la longitud del segmento $\overline{OP}$.

3. Encontrar todos los números naturales N que cumplan las dos condiciones siguientes:
   - Sólo dos de los dígitos de N son distintos de 0 y uno de ellos es 3.
   - N es un cuadrado perfecto.

4. Determinar el menor entero positivo n para el cual existan enteros positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ menores o iguales que 15 y no necesariamente distintos, tales que los cuatro últimos dígitos de la suma $a_1! + a_2! + \cdots + a_n!$ sean 2001.

5. Sean a, b y c números tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$ tiene dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Se sabe que los números p_1, q_1, p_2,q_2 en ese orden, forman una progresión aritmética. Demostrar que $a + c = 0$.

6. Se marcan 10000 puntos sobre una circunferencia, y se numeran de 1 a 10000 en el sentido de las manecillas del reloj. Se trazan 5000 segmentos de recta de manera que se cumplan las tres condiciones siguientes:
   - Cada segmento une dos de los puntos marcados.
   - Cada punto marcado pertenece a uno y sólo un segmento.
   - Cada segmento intersecta exactamente a uno de los segmentos restantes.

   A cada segmento se le asocia el producto de los números asignados a sus dos puntos extremos. Sea S la suma de los productos asociados a todos los segmentos. Demostrar que S es múltiplo de 4.