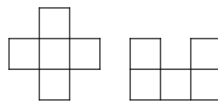


## II Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

San Salvador, El Salvador – 2000

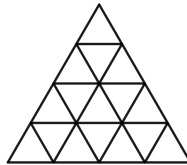
### Problemas

- Encuentra todos los números naturales de tres dígitos  $abc$  ( $a \neq 0$ ), tales que  $a^2 + b^2 + c^2$  es divisor de 26.
- Encontrar todos los enteros para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y  $n$ , con piezas congruentes a:



Notas:

- Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos.
  - Los cuadrillos de las piezas son de lado 1.
- Sea  $ABCDE$  un pentágono convexo (las diagonales quedan dentro del pentágono). Sean  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  los baricentros de los triángulos  $ABE$ ,  $BCE$ ,  $CDE$  y  $DAE$ , respectivamente. Demuestra que  $PQRS$  es un paralelogramo y que su área es igual a  $\frac{2}{9}$  del área del cuadrilátero  $ABCD$ .
  - En la figura, escribe un entero positivo dentro de cada triangulito, de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos, sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos de dicho triángulo.



Nota: Dos triangulitos son vecinos si comparten un lado.

- Sea  $\triangle ABC$  un triángulo acutángulo.  $C_1$  y  $C_2$  son circunferencias que tienen a los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{CA}$  como diámetros, respectivamente.  $C_2$  corta al lado  $\overline{AB}$  en el punto  $F$  ( $F \neq A$ ) y  $C_1$  corta al lado  $\overline{CA}$  en el punto  $E$  ( $E \neq A$ ). Además,  $\overline{BE}$  corta a  $C_2$  en  $P$  y  $\overline{CF}$  corta a  $C_1$  en  $Q$ . Demuestra que las longitudes de los segmentos  $\overline{AP}$  y  $\overline{AQ}$  son iguales.
- Al escribir un entero  $n \geq 1$  como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una representación buena” de  $n$ .
  - Escribe las 5 representaciones buenas de 10.
  - ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

Nota: Dos representaciones buenas que difieren sólo en el orden de los sumandos se consideran la misma.