

I Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

San José, Costa Rica – 1999

Problemas

1. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefona a la persona B , A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?
2. Encontrar un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n .
3. Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla '+'.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

+

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla $+$. Pasa la calculadora a B , que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A ; a continuación pulsa $+$ y le devuelve la calculadora a A , que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es está?

4. En el trapecio $ABCD$ de bases \overline{AB} y \overline{CD} , sea M el punto medio del lado \overline{DA} . Si $\overline{BC} = a$, $\overline{MC} = b$ y el ángulo mide 150° , hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b .
5. Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos b y c , tales que $a + b$, $a + c$, $b + c$ y $a + b + c$ son cuatro cuadrados perfectos.
6. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S . Encuentre el número máximo de elementos de S .